

Rappels :

$$\int \frac{1}{(x-a)(x-b)} dx = \int \frac{A}{x-a} dx + \frac{B}{x-b} dx = A \log |x-a| + B \log |x-b|$$

$$\int \frac{1}{(x-a)(x^2+bx+c)} dx = \int \frac{A}{x-a} dx + \int \frac{Bx+C}{x^2+bx+c} dx$$

$$\begin{aligned} \uparrow \\ b^2 - 4c < 0 &= A \log |x-a| + \int \frac{Bx+C}{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4}} dx > 0 \\ &= A \log |x-a| + \frac{1}{c - \frac{b^2}{4}} \int \frac{Bx+C}{\left(\frac{x+b/2}{c - b^2/4}\right)^2 + 1} dy \quad \frac{x+b/2}{c - b^2/4} = y \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{(x-a)^2 \cdot (x-b)} dx = ?$$

$$\int \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-a} + \frac{C}{x-b}$$

arctan(y) et / or $\frac{1}{2} \log(y^2+1)$

X

Exemple 9.20 (suite)

(iv) Calculons $\int_3^5 \frac{1}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} dx$

pour la factorisation, tester $-2, -1, 1, 2$

$$\hookrightarrow x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x-1)^2(x-2)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x-1)^2(x-2)} &= \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-2} \\ &= \frac{(A+C)x^2 + (B-3A-2C)x + 2A-2B+C}{(x-1)^2(x-2)}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+C=0 \\ B-3A-2C=0 \\ 2A-2B+C=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} A &= -1 \\ B &= -1 \\ C &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int_3^5 \frac{1}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} dx &= \int_3^5 \left(-\frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-2)} \right) dx \\
&= \left[-\log|x-1| + \frac{1}{x-1} + \log|x-2| \right]_3^5 \\
&= -\frac{1}{4} - \log(2) + \log(3)
\end{aligned}$$

Remarque 9.21 :

(i) Si on calcule $\int_a^b \frac{p(x)}{q(x)} dx$ et que $\deg(p) \geq \deg(q)$

on commence par faire la division euclidienne de p par q : $p(x) = d(x) \cdot q(x) + r(x)$, avec $\deg(r(x)) < \deg(q(x))$

$$\int_a^b \frac{p(x)}{q(x)} dx = \int_a^b d(x) + \frac{r(x)}{q(x)} dx$$

polynôme

↑ décomposition en élément
simples.

(ii) Après factorisation, on considère les éléments
simples suivants :

$$\frac{1}{(x-a)} \sim \frac{A}{x-a}$$

$$\frac{1}{(x-a)^2} \sim \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2}$$

$$\frac{1}{(x-a)^3} \sim \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{(x-a)^3}$$

etc...

$$\frac{1}{x^2 + bx + c}$$

$\leadsto$

$$\frac{Ax + B}{x^2 + bx + c}$$

$$b^2 - 4c < 0$$

~~$$\frac{1}{(x^2 + bx + c)^2}$$~~

$\leadsto$

$$\frac{Ax + B}{x^2 + bx + c}$$

+

~~$$\frac{Cx + D}{(x^2 + bx + c)^2}$$~~

~~$$\frac{1}{(x^2 + bx + c)^3}$$~~

$\leadsto$

$$\frac{Ax + B}{x^2 + bx + c}$$

~~$$+ \frac{Cx + D}{(x^2 + bx + c)^2}$$~~

+

~~$$\frac{Ex + F}{(x^2 + bx + c)^3}$$~~

etc...

§ 9.4 Intégrale généralisée

Définition 9.23 Intégrale généralisée de type 1.

soient $a < b$

(i) $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continue. L'intégrale généralisée de f sur $]a, b[$ est

$$\int_{a^+}^b f(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{a+\delta}^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx.$$

si la limite existe.

(ii) $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continue. L'intégrale généralisée de f sur $[a, b[$ est

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_b^b f(x) dx$$

$$\int_a^{b^-} f(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\delta} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$$

si la limite existe.

(iii) Soit $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continue et tq $\exists c \in]a, b[$
 tq $\int_{a^+}^c f(x) dx$ et $\int_c^{b^-} f(x) dx$ existent.

l'intégrale généralisée de f sur $]a, b[$ est

$$\begin{aligned} \int_{a^+}^{b^-} f(x) dx &= \lim_{\delta_1 \rightarrow 0^+} \lim_{\delta_2 \rightarrow 0^+} \int_{a+\delta_1}^{b-\delta_2} f(x) dx \\ &= \lim_{t_1 \rightarrow a^+} \lim_{t_2 \rightarrow b^-} \int_{t_1}^{t_2} f(x) dx \\ &= \int_{a^+}^c f(x) dx + \int_c^{b^-} f(x) dx \end{aligned}$$

(iv) Dans les 3 points ci-dessus où qu'une limite n'existe pas, on dit que l'intégrale généralisée diverge

Remarque 9.24 (i)

dans (iii),

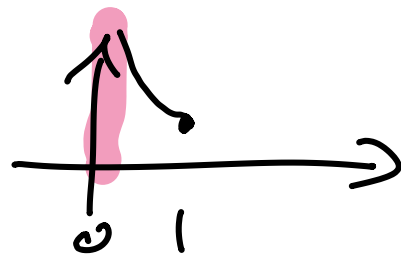
$\exists c \in]a, b[$ tq
 $\int_{a+}^c f(x)dx$ et $\int_c^{b-} f(x)dx$
existent

$\forall c \in]a, b[$,
 $\Leftrightarrow \int_{a+}^c f(x)dx$ et $\int_c^{b-} f(x)dx$
existent.

(ii) Dans (iii) l'ordre des limites n'a pas d'importance sous l'hypothèse donnée.

Exemple 9.25 (i)

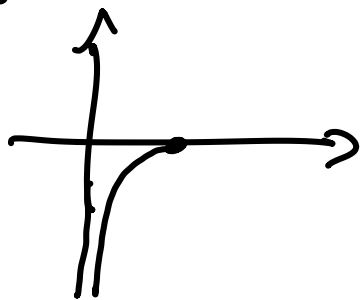
Calculons $\int_0^1 \log(x) dx$



$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{\delta}^1 \log(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} [x \log(x) - x]_{\delta}^1$$

$$= \lim_{\delta \rightarrow 0^+} -1 - \delta \log(\delta) + \delta = -1$$

$\Rightarrow$ l'intégrale généralisée $\int_0^1 \log(x) dx = -1$ existe /
converge.



(ii) Considerons $\int_{-1}^1 \frac{x}{1-x^2} dx$

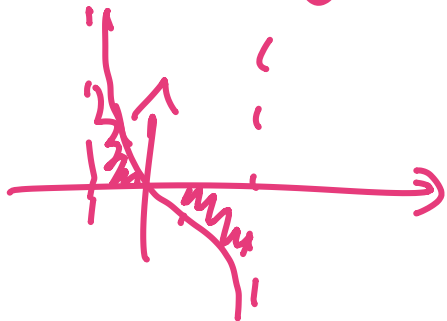
$$C=0 \quad \int_0^{1-} \frac{x}{1-x^2} dx = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_0^{1-\delta} \frac{x}{1-x^2} dx =$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \left[-\frac{1}{2} \log |1-x^2| \right]_0^{1-\delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} -\frac{1}{2} \log (2\delta - \delta^2) = +\infty$$

$\Rightarrow$ l'intégrale généralisée diverge.

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{-1+\delta}^{1-\delta} \frac{x}{1-x^2} dx = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \underbrace{-\frac{1}{2} \log |1-(1-\delta)^2|}_{\text{}} + \underbrace{\frac{1}{2} \log |1-(\delta-1)^2|}_{\text{}}$$

$$= \lim_{\delta \rightarrow 0^+} 0 = 0.$$



Définition 9.2.6 (Intégrale généralisée de type II)

(i) Soit $f:]-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. L'intégrale généralisée de f sur $]-\infty, b]$ est

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_{-M}^b f(x) dx \quad \text{si la limite existe}$$

(ii) Soit $f: [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue. L'intégrale généralisée de f sur $[a, +\infty[$ est

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_a^M f(x) dx.$$

(iii) Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue tq $\exists c \in \mathbb{R}$ tq $\int_{-\infty}^c f(x) dx$ et $\int_c^{+\infty} f(x) dx$ existent.

L'intégrale généralisée ch de f sur $\mathbb{R}$ est

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{M_1 \rightarrow +\infty} \lim_{M_2 \rightarrow +\infty} \int_{-M_1}^{M_2} f(x) dx$$

(iv) Dans les trois points ci-dessus, dès qu'une limite n'existe pas on dit que l'intégrale généralisée diverge.

Remarque 9.27

idem que 9.24.

Définition 9.28 (Intégrales généralisées de type III)

(i) Soit $f :]a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue tq $\exists c \in]a, +\infty[$
tq $\int_a^c f(x) dx$ & $\int_c^{+\infty} f(x) dx$ existent.

L'intégrale généralisée de f sur $]a, +\infty[$ est

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_{a+\delta}^M f(x) dx$$

(ii) $f :]-\infty, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continue tq $\exists c \in]-\infty, b[$ tq
 $\int_{-\infty}^c f(x) dx$ et $\int_c^b f(x) dx$ existent.

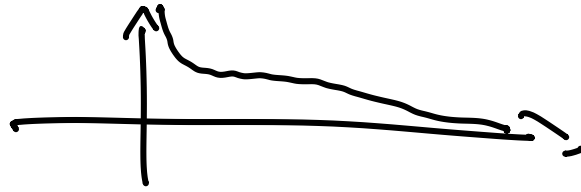
L'intégrale généralisée de f sur $] -\infty, b[$ est

$$\int_{-\infty}^{b^-} f(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_{-M}^{b-\delta} f(x) dx$$

(iii) Dans (i) - (ii) de's qu'une limite n'existe pas
l'intégrale généralisée diverge.

Exemple 9.30

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{x^\alpha}$$



(i) Soit $\alpha > 0$, $f_\alpha:]0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_\alpha(x) = \frac{1}{x^\alpha}$

Déterminer les paramètres α pour lesquels

$\int_0^1 f_\alpha(x) dx$ converge :

Cas $\alpha \neq 1$:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_\delta^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{x^{\alpha-1}} \right]_\delta^1 = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{\delta^{\alpha-1}}$$

$$= \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 1 \\ \frac{1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha < 1 \end{cases}$$

Cas $\alpha = 1$:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{\delta}^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} [\log|x|]_{\delta}^1 = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} -\log(\delta) = +\infty$$

$\Rightarrow \int_{0^+}^1 \frac{1}{x^{\alpha}} dx$ converge si et seulement si $\alpha < 1$

(ii) Soit $\alpha > 0$, $f_{\alpha} : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_{\alpha}(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}.$$

Déterminer les paramètres α pour lesquels $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx$ converge.

Cas $\alpha \neq 1$

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_1^M \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{x^{\alpha-1}} \right]_1^M = \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{M^{\alpha-1}} + \frac{1}{\alpha-1}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{si } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 1 \end{cases}$$

Cas $\alpha = 1$

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_1^M \frac{1}{x} dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} [\log(x)]_1^M = \lim_{M \rightarrow +\infty} \log(M) = +\infty$$

$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ converge si et seulement si $\alpha > 1$